12/11/15

Γραμμική Άλγεβρα 1

Προσαρτημένος Πίνακας

$A^* = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det A \neq 0_F$, τότε $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix}$

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu\times\nu}$. Ο προσαρτημένος πίνακας: adj A του A είναι ο $\nu\times\nu$ πίνακας που έχει στην (i,j)-θέση το στοιχείο $(-1)^{i+j}\det(A_{ji})$, όπου A_{ji} είναι ο $(\nu-1)\times(\nu-1)$ ~~ν×ν~~ πίνακας του A που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j-γραμμή και την i-στήλη.

π.χ. (από τον A^*) $\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} d & -1\cdot b \\ -1\cdot c & \alpha \end{bmatrix}$

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Έστω $A \in F^{\nu\times\nu}$ πίνακας. Τότε $A(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A)A = (\det A)I_\nu$

Πόρισμα: Έστω $A \in F^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος. Τότε (όπως ξέρουμε) $\det A \neq 0_F$ και $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A)$.

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = C$$

Επίσης $\det A = \dots = 4$

Άρα $A^{-1} = \frac{1}{4} C$

Τύπος Cramer

Προσοχή: Εφαρμόζεται μόνο όταν #εξισώσεων = # αριθμός αγνώστων και ο πίνακας A του συστήματος είναι αντιστρέψιμος

$A \in F^{\nu\times\nu}$, $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_\nu\end{pmatrix} = b$ (Σ), και ο A αντιστρέψιμος.
Τότε βαθμίδα$(A)=\nu$, άρα βαθμίδα $(A/b)=\nu$ αφού $(A/b) \in F^{\nu\times(\nu+1)}$ και #αγνώστων - βαθμίδα$(A) = \nu-\nu=0$
Επομένως από τη θεωρία το (Σ) έχει μοναδική λύση. Έχουμε $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_\nu\end{pmatrix} = b \Rightarrow A^{-1}\left(A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_\nu\end{pmatrix}\right) = A^{-1}\cdot b \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_\nu\end{pmatrix} = A^{-1}\cdot b = \frac{1}{\det A}\cdot \underset{\nu\times\nu}{\operatorname{adj} A}\cdot \underset{\nu\times 1}{b} \quad (*)$$

Σαν συνέπεια της (*) $x_i = \frac{1}{\det A}\cdot \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{i+j}\cdot b_j \det(A_{ji})$

για $i=1,2,\dots,\nu$

$$C_i = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i+1} & b_1 & \alpha_{1i+1} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & & \alpha_{\nu i+1} & b_\nu & \alpha_{\nu i+1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

όπου $A=(\alpha_{ij})$ και $b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_\nu\end{pmatrix}$. Με άλλα λόγια ο C_i προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την i-στήλη του A με τον πίνακα στήλη b. Τότε από την

* $x_i = \frac{\det C_i}{\det A}$ για κάθε i με $1\le i\le \nu$

Παράδειγμα

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = b$, όπου $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix}$

Λύση 1. Δείξτε ότι $\det = 416 \neq 0_{\mathbb{R}}$. Επομένως εφαρμόζεται ο τύπος Cramer και η μοναδική λύση είναι

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\det C_1}{\det A} = \frac{\det C_1}{416} \\ \frac{\det C_2}{\det A} = \frac{\det C_2}{416} \\ \frac{\det C_3}{\det A} = \frac{\det C_3}{416} \\ \frac{\det C_4}{\det A} = \frac{\det C_4}{416} \end{pmatrix}$$

όπου $C_1 = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 1 & 5 \\ 16 & 1 & 5 & 2 \\ 17 & 5 & 2 & 0 \\ 18 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & 5 \\ 0 & 16 & 5 & 2 \\ 1 & 17 & 2 & 0 \\ 5 & 18 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 1 & 16 & 2 \\ 1 & 5 & 17 & 0 \\ 5 & 2 & 18 & 1 \end{bmatrix}$,

$C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 1 & 5 & 2 & 17 \\ 5 & 2 & 0 & 18 \end{bmatrix}$

Διανυσματικοί Χώροι

Παράδειγμα: Έστω F σώμα. Θέτουμε $V = F^{\nu \times \mu}$

Τότε το V με πράξεις πρόσθεση πινάκων:

$+$ $V \times V \to V$, $(A, B) \to A + B$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$\circ$ $F \times V \to V$, $(\lambda, A) \to \lambda A$ είναι

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ Χ$^{\omega}$ΡΟΣ, επί του σώματος F.

Ορισμός: Έστω F σώμα ένας διανυσματικός χώρος ~~V επί του~~ $(V, +, \cdot)$ ή πιο απλά V αποτελείται από:

i) Ένα μη κενό σύνολο V

ii) Μια απεικόνιση $V \times V \to V$ που λέγεται πρόσθεση στο V
$(v_1, v_2) \to v_1 + v_2$

iii) Μια απεικόνιση $F \times V \to V$ που λέγεται (βαθμωτός)
$(\lambda, v) \to \lambda v$

πολλαπλασιασμός έτσι ώστε:

1) $u + v = v + u$, για κάθε $u, v \in V$ (μεταθετική)

2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ $\forall$ $u, v, w \in V$ (προσεταιριστική)

3) Υπάρχει $0_V \in V$ ώστε $u + 0_V = 0_V + u = u$ $\forall$ $u \in V$ (ουδέτερο στοιχείο)

4) Για κάθε $u \in V$ υπάρχει στοιχείο $(-u) \in V$ ώστε $u + (-u) = (-u) + u = 0$ (ύπαρξη αντιθέτου)

5) $\lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w$ $\forall$ $\lambda \in F$ $u, w \in V$ (επιμεριστικότητα βαθμωτού πολλαπλασιασμού επί της πρόσθεσης)

6) $(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u$ $\forall$ $\mu, \lambda \in F$ με $u \in V$ (επιμεριστικότητα βαθμωτού πολλ. επί της πρόσθεσης στο F)

7) $(\lambda \mu) \cdot u = \lambda (\mu \cdot u)$ $\forall$ $\mu, \lambda \in F$ $u \in V$

8) $1_F \cdot u = u$ $\forall$ $u \in V$